NO

Date

28/03/2018

Μάθημα 6ο

Άσκηση 1.10

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ $G(a, \theta)$
↳ γνωστό

Βρείτε ΑΟΕΑ εκτίμηση

Λύση

$$f(x;\theta) = \frac{x^{a-1} e^{-x/\theta}}{\theta^a \Gamma(a)} \quad , x \geq 0$$

$f(x,\theta)$

Θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να γράψουμε την $f(x,\theta)$ στη μορφή $c(\theta)\, h(x)\, e^{Q(\theta) \cdot T(x)}$ $x \in A$

Έχω $c(\theta) = \dfrac{1}{\theta^a}$, $h(x) = \dfrac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}$, $Q(\theta) = -\dfrac{1}{\theta}$, $T(x) = x$

Με $A = \{x \geq 0\}$ ανεξάρτητο του θ.

Το ίσον στην ανισότητα C-R επιτυγχάνεται αν-ν

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod f(x;\theta) = K(\theta, n)\,(U - g(\theta))$$

$$\ln \prod f(x;\theta) = \ln \left\{ \frac{(\prod x_i^{a-1})\, e^{-\sum x_i/\theta}}{\theta^{na}\, \Gamma^n(a)} \right\} =$$

$$= \ln(\prod x_i^{a-1}) - \frac{\sum x_i}{\theta} - na \ln\theta - n \ln \Gamma(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod f(x_i;\theta) = \frac{\sum x_i}{\theta^2} - \frac{na}{\theta} = \frac{an}{\theta^2}\left(\frac{\sum x_i}{an} - \theta \right)$$

Άρα: $U = \dfrac{\sum x_i}{an}$ είναι ΑΟΕΑ του θ και ισχύει η ισότητα της ανισότητας C-R

NO.

Date

Κάναμε C-R γιατί μας ζητούσε ΑΟΕΔ της θ
Τώρα αν μας ζητούσε ΑΟΕΔ για το $1/\theta$ θα πηγαίναμε με τον επαρκής + πλήρης τρόπο

Άλλος τρόπος: 1ο βήμα: επάρκεια

$$\prod f(x_i,\theta) = \frac{\prod x_i^{a-1} e^{-\Sigma x_i/\theta}}{\theta^{na} \Gamma^{n}(a)} = g(\Sigma x_i, \theta)\, h(x)$$

Επομένως ΣX_i επαρκής σ.σ.

2ο Βήμα: Θ.δ.ο. ΣX_i πλήρης σ.σ.

$$m_{\Sigma x_i}(t) \xrightarrow[\text{μάθημα}]{\text{προηγ.}} m_x^{\,n}(t) = \left[(1-\theta t)^{-a}\right]^n = (1-\theta t)^{-an}$$

με απόδειξη.

$t < 1/\theta$

ροπογεννήτρια της Γάμμα (an, θ)

$T = \Sigma X_i$

$$f_T(t) = \frac{t^{an-1} e^{-t/\theta}}{\theta^{an}\Gamma(an)}, \quad t \geq 0$$

$$E\, h(t) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(t)\, t^{an-1} e^{-t/\theta}}{\theta^{an}\Gamma(an)}\, dt = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

$$\int_0^{+\infty} h(t) \cdot t^{an-1} e^{-t/\theta}\, dt = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

$$\int_0^{+\infty} r(t)\, e^{-t/\theta}\, dt = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

$L(r(t)) = 0$ που είναι ο μετασχηματισμός Laplace
άρα και $r(t) = 0$

NO.

Date

Άρα $T = \sum X_i$ είναι πλήρης.

Επειδή σε αυτό το πρόβλημα θα πρέπει να ξέρω μετασχηματισμό Laplace

Επομένως πρέπει να μαντέψω :

$E\,T \xrightarrow{T \sim \text{Γάμμα}(an, \theta)} an\theta \Rightarrow E\,\frac{T}{an} = \theta$

Τώρα για το ΑΟΕΔ του $1/\theta$ θα πάω $E(1/T)$

$$E\,\frac{1}{T} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{t^{an-1} e^{-t/\theta}}{\theta^{an}\,\Gamma(an)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{an-2} e^{-t/a}}{\theta^{an}\,\Gamma(an)}\,dt$$

$$= \frac{1}{\theta^{an}\,\Gamma(an)} \int_0^{+\infty} t^{an-2} e^{-t/\theta}\,dt = \frac{1}{\theta^{an}\,\Gamma(an)} \int_0^{+\infty} t^{(an-1)-1} e^{-t/\theta}\,dt$$

$$= \frac{\theta^{an-1}\,\Gamma(an-1)}{\theta^{an}\,\Gamma(an)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t^{(an-1)-1}\, e^{-t/\theta}}{\theta^{an-1}\,\Gamma(an-1)}\,dt}_{1} =$$

σ.π.π. : $\frac{x^{a-1} e^{-x/\theta}}{\theta^{a}\,\Gamma(a)}$

$$= \frac{1}{\theta(an-1)}$$

$\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1)$

Άρα ο ΑΟΕΔ της $1/\theta$ είναι $E\,\frac{na-1}{T}$

Άσκηση 1.11

$$f(x,\theta) = \frac{x+1}{\theta(\theta+1)} e^{-x/\theta} \quad , x \geq 0 \quad , \theta > 0$$

Να βρεθεί ΑΟΕΔ των:

i) $g_1(\theta) = \dfrac{\theta(1+2\theta)}{\theta+1}$

ii) $g_2(\theta) = \dfrac{(3+2\theta)(2+\theta)}{\theta+1}$

Λύση

Το π.ο. $x \geq 0$ δεν εξαρτάται από το θ άρα θα πρέπει να δούμε αν η $f(x,\theta)$ ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών.

$$c(\theta) = \frac{1}{\theta(\theta+1)}$$

$$h(x) = x+1$$

$$T(x) = x$$

$$Q(\theta) = -\frac{1}{\theta}$$

Πάμε με C-R : $\prod f(x_i;\theta) = \dfrac{\prod(x_i+1)}{\theta^n(\theta+1)^n} e^{-\sum x_i/\theta}$

$$\ln \prod f(x_i,\theta) = \ln \prod(x_i+1) - n\ln\theta - n\ln(\theta+1) - \frac{\sum x_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln \prod f(x_i,\theta) = \underbrace{-\frac{n}{\theta} - \frac{n}{\theta+1}}_{= -\frac{(2\theta+1)n}{(\theta+1)\theta}} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} =$$

$$\left[= k(\theta,n)(U - g(\theta))\right] = \frac{n}{\theta^2}\left(\frac{\sum x_i}{n} - \underbrace{\frac{(2\theta+1)\theta^2}{\theta(\theta+1)}}_{= g_1(\theta)}\right)$$

Επομένως $\frac{\sum x_i}{n}$ ΑΟΕΔ της $g_1(\theta)$

Είναι η $g_2(\theta) \overset{?}{=} a\, g_1(\theta) + b$

$$\frac{(3+2\theta)(2+\theta)}{\theta+1} = \frac{a(2\theta+1)}{\theta+1} + b \Rightarrow a=1,\ b=6$$

Άρα ο ΑΟΕΔ της $g_2(\theta)$ είναι $\frac{\sum x_i}{n} + 6$

NO.

Date

Άσκηση 1.7.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Gamma $(1,\theta)$

Επαρκής σ.σ. για θ?

γνωστό

Η άσκηση είναι ειδική περίπτωση της 1.10. (Γάμμα (a,θ))
εκεί δείξαμε ότι ΣX_i επαρκής.

Άσκηση 1.6.

$X_1, X_2, \dots X_n$ $B(2,\theta)$

i) Συνεπής της θ.

ii) αμερόληπτος της $P(X=2)$

$$f(x,\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x}, \quad x=0,1,2,\dots \quad (*)$$

Λύση.

(i) συνέπεια → ασυμπτωτική αμεροληψία
→ Διακύμανση → 0

• Ξέρω ότι στη διωνυμική $B(2,\theta)$ είναι: $EX = 2\theta$

$$E\bar{X} = E\frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{\Sigma E X_i}{n} = 2\theta$$

Επομένως, άμεσα προκύπτει ότι: $E\frac{\bar{X}}{2} = \theta$ → αμερόληπτος ⇒

⇒ ασυμπτωτικά αμερόληπτος (⇐αμερόληπτος)

• Διακύμανση → $Var\frac{\bar{X}}{2} = \frac{1}{4} Var\bar{X} = \frac{1}{4} Var\frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{\Sigma Var X_i}{4n^2} =$

$$= \frac{2\theta(1-\theta)}{4n} \to 0$$

(ii) $P(X=2) \overset{(*)}{=} \theta^2$

Ισχύει πάντοτε ότι: $ES^2 = \sigma^2$ Η δειγματική διακύμανση είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του πληθυσμιακής.

NO

Date

$ES^2 = \sigma^2 \Rightarrow ES^2 = 2\theta(1-\theta) \Rightarrow ES^2 = 2\theta - 2\theta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\theta^2 = 2\theta - ES^2 \Rightarrow \theta^2 = \theta - \frac{1}{2}ES^2$

εδώ θέλω να έχω αναμενόμενες τιμές μόνο

Δείξαμε ότι: $E\frac{\bar{X}}{2} = \theta$

$\downarrow$

συνεπής εκτιμητής του θ (αναμενόμενη τιμή)

Άρα: $\theta^2 = \underbrace{E\frac{\bar{X}}{2}}\ - \underbrace{\frac{1}{2}ES^2} \Rightarrow \boxed{\theta^2 = E\frac{\bar{X}-S^2}{2}}$

$\downarrow$

ΑΟΕΔ εκτιμητής του θ^2

Άσκηση 1.8.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$

i) επαρκής σ.σ. για το σ^2 όταν μ γνωστό

ii) επαρκής σ.σ. για το $\theta = (\mu, \sigma^2)$

Λύση.

(i) $f(x, \overset{\sigma^2}{\theta}) = (2\pi\theta)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2}$

$\prod f(x_i, \theta) = (2\pi\theta)^{-n/2} e^{-1/2\theta \sum(x_i-\mu)^2} =$

$= g(\sum(x_i-\mu)^2, \theta) \cdot h(x)$

(ii) $f(x, \overset{\mu}{\theta_1}, \overset{\sigma^2}{\theta_2}) = (2\pi\theta_2)^{-1/2} e^{-1/2\theta_2 \cdot (x-\theta_1)^2}$

$\prod f(x, \theta_1, \theta_2) = (2\pi\theta_2)^{-n/2} \cdot e^{-1/2\theta_2 \sum(x_i-\theta_1)^2}$

$= (2\pi\theta_2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta_2}\{\sum x_i^2 - 2\theta_1 \sum x_i + n\theta_1^2\}}$

NO.
Date

$$= (2\pi\Theta_2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\Theta_2}\sum X_i^2 + \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\sum X_i - \frac{n}{2}\frac{\Theta_1^2}{\Theta_2}}$$

$$= g(\sum X_i^2, \sum X_i, \Theta)\, h(x)$$

$$(\sum X_i, \sum X_i^2)$$

Άσκηση 1.12.

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από την $f(x,\theta) = \theta(1-\theta)^x$, $x = 0,1,2,\dots$
και $0 < \theta < 1$.

i) ΑΟΕΔ το $\frac{1-\theta}{\theta}$

Λύση. 1ος τρόπος C-R

ΑΟΕΔ ⇐ Το π.ο. → εξαρτάται από το θ;
$f(x,\theta)$ → ανήκει στην εκθετική οικογένεια;

Το π.ο. δεν εξαρτάται από το θ.

$$f(x,\theta) = \theta \cdot e^{\log(1-\theta)^x} = \theta \cdot 1 \cdot e^{x \cdot \log(1-\theta)}, \quad x \in A$$

Ανήκει στην εκθετική οικογένεια.

$$\prod f(x_i,\theta) = \theta^n (1-\theta)^{\sum x_i}$$

$$\ln \prod f(x_i,\theta) = n \ln\theta + \sum X_i \ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln \prod f(x_i,\theta) = \frac{n}{\theta} - \frac{\sum X_i}{1-\theta} \left(= \frac{n(1-\theta)}{\theta(1-\theta)} - \frac{\sum X_i \cdot \theta}{\theta(1-\theta)} = \right)$$

$$= -\frac{n}{1-\theta}\left[\frac{\sum X_i}{n} - \frac{1-\theta}{\theta}\right]$$

Άρα $\frac{\sum X_i}{n}$ ΑΟΕΔ της $\frac{1-\theta}{\theta}$ (Μετά, αν ζητούσε για θ δε θα μπορούσαμε με την C-R να βρω ΑΟΕΔ)

2ος τρόπος
$\sum X_i$ επαρκής. / ροπογεννήτριες για εύρεση κατανομής κτλ

θα έπαιρνα: επάρκεια, πληρότητα αμεροληψία

NO.

Date

Άσκηση 1.13

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ., $\text{Εκθ}(1/\theta)$

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}, \quad x \geq 0$$

(i) Ν.δ.ο. X_2 αμερόληπτος της θ και να βρεθεί η διακύμανση

τυπολόγιο $\to$ $E X_2 = \theta$

$$\text{Var} X_2 = \frac{1}{(1/\theta)^2} = \theta^2$$

(ii) ν.δ.ο. $X_1 + X_2$ επαρκής σ.σ.

$$\prod_{i=1}^{2} f(x,\theta) = \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}(X_1+X_2)} = g(X_1+X_2, \theta)\, h(x)$$

(iii) Να βρεθεί ο εκτιμητής $E(X_2 / X_1 + X_2)$

Είναι ο εκτιμητής αυτός καλύτερος από τον X_2;

1ος τρόπος) Rao - Blackwell

Άρα απόδειξη του Rao - Blackwell. (αναγωγή του προβλήμ.)

2ος τρόπος Υπολογισμός $E(X_2 / X_1 + X_2)$ $\underline{\underline{x_2: \text{εκθετική}}}$

$$= \int x_2 \underbrace{f_{X_2/X_1+X_2}(x_2|t)}_{\text{Δεσμευμένη.}} \, dx_2$$

Προσδιορισμός της $X_2 / X_1 + X_2$

$X_1 \sim \text{Εκθ}(1/\theta)$

$X_2 \sim \text{Εκθ}(1/\theta)$

$X_2 / X_1 + X_2 \sim$;

$$f_{X_2/X_1+X_2} = \frac{f_{X_2, X_1+X_2}}{f_{X_1+X_2}} \longleftarrow \text{πρέπει να βρω}$$

NO

Date

τυπολόγιο

- $m_{X_1+X_2}(t) = m_X^2(t) = \left[\dfrac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta}-t}\right]^2 = \left[\dfrac{\frac{1}{\theta}-t}{\frac{1}{\theta}}\right]^{-2} =$

$= \left(1-\frac{1}{\theta}t\right)^{-2}, \quad t<\frac{1}{\theta}$ ροπογεννήτρια της $\Gamma(2,\theta)$

$f_{X_1+X_2}(t) = \dfrac{t^{2-1}e^{-t/\theta}}{\theta^2\,\Gamma(2)} = \dfrac{t}{\theta^2}e^{-t/\theta}, \quad t\geq 0$

- $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2) = \dfrac{1}{\theta^2}e^{-(x_1+x_2)/\theta}$

Θέτω $\begin{cases} W = X_2 \\ T = X_1+X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = T-W \\ X_2 = W \end{cases}$ 1-1 μετασχηματισμός

(μερικές παραγώγους και Ιακωβιανή ορίζουσα)

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$f_{W,T}(w,t) = \dfrac{1}{\theta^2}e^{-t/\theta}$

$\left.\begin{array}{l} X_1 = T-W \\ X_1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T-W\geq 0$
και $X_2 = W,\ X_2\geq 0 \Rightarrow W\geq 0$
$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} t\geq w \\ w\geq 0\end{cases}}$ π.ο.

Άρα $f_{X_2/X_1+X_2} = \dfrac{\frac{1}{\theta^2}e^{-t/\theta}}{\frac{t\cdot e^{-t/\theta}}{\theta^2}} = \dfrac{1}{t}$ $\quad 0<X_2<t$

Επομένως $E(X_2/X_1+X_2) = \displaystyle\int_0^t X_2\frac{1}{t}\,dX_2 = \frac{t}{2} =$

$= \dfrac{X_1+X_2}{2}$

NO

Date

Άρα $E\,\frac{X_1+X_2}{2} = \theta$

$$Var\,\frac{X_1+X_2}{2} = \frac{1}{4}\left(Var X_1 + Var X_2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\theta^2+\theta^2\right) = \frac{\theta^2}{2}$$ $<$ $Var X_2 = \theta^2$

3ος τρόπος : X_2 αμερόληπτος
X_1+X_2 επαρκής
(είναι Rao Blackwell $U = X_2$, $T = X_1+X_2$)

Μπορούμε ν.δ.ο. $T = X_1+X_2$: πλήρης

$$f_T(t) = \frac{t\cdot e^{-t/\theta}}{\theta^2},\ t \geq 0$$

$$ET = 2\theta \Rightarrow E\left(\overset{U_2(T)}{\frac{T}{2}}\right) = \theta$$

$\frac{T}{2} = \frac{X_1+X_2}{2}$ ΑΟΕΔ του θ.

($E(X_2 / X_1+X_2) = U_1(T)$
συνάρτηση του T πλήρης
και αμερόληπτος της θ.

$\Rightarrow$ μοναδικός

$$E\left(U_1(T)-U_2(T)\right) = 0 \Rightarrow E\,h(T) = 0 \Rightarrow h(T)=0 \quad \forall t$$

$$E\Big(\underbrace{E(X_2 / X_1+X_2)}_{=\,U_1(T)}\Big) = E(X_2) = \theta$$

$$E(U_2(T)) = \theta \qquad\qquad \Downarrow \quad U_1(T)=U_2(T)$$

ΑΟΕΔ του θ $\rightarrow$ $\frac{T}{2}$

NO.
Date

(iv) ΑΟΕΔ του $\frac{1}{\theta}$;

$$E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\cdot\frac{t\cdot e^{-t/\theta}}{\theta^2}\,dt = \frac{1}{\theta^2}\int_0^{+\infty} e^{-t/\theta}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\cdot\theta \underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}\cdot e^{-t/\theta}\,dt}_{\text{για να το κάνω εκθετική}} = \frac{1}{\theta}.$$

Άρα $\frac{1}{T}$ ΑΟΕΔ του $\frac{1}{\theta}$

Άσκηση 1.14

$X_1, X_2, \ldots X_n$ τ.δ. $Εκθ(\theta)$
$f(x,\theta) = \theta\cdot e^{-\theta x}$, $x \geq 0$
ΑΟΕΔ της θ, $1/\theta$;

Λύση. Με L-S.

$\prod f(x,\theta) = \theta^n e^{-\theta\sum x_i}$, $x \in A$ ανεξ. του θ.
$= g(\sum x_i, \theta)h(x)$

$T = \sum x_i$ επαρκής σ.σ.

ροπογεννήτρια $m_T(x) = m_x^n(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^n = \left(\frac{\theta - t}{\theta}\right)^{-n} =$

$= \left(1 - \frac{1}{\theta}t\right)^{-n}$, $t<\theta$ Γάμμα $\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$

$E h(T) = 0 \;\forall\theta \Rightarrow \int_0^{+\infty} h(t)\frac{t^{n-1}e^{-t\theta}}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\Gamma(n)}\,dt = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} h(t)\,t^{n-1}e^{-t\theta}\,dt = 0 \Rightarrow h(t) = 0 \;\forall t$

Άρα $E\,T = n\dfrac{1}{\theta} \Rightarrow \boxed{E\,\dfrac{T}{n} = \dfrac{1}{\theta}}$ ΑΟΕΔ του $\dfrac{1}{\theta}$

Για τον ΑΟΕΔ του θ υπολογίζω $E\,\dfrac{1}{T}$.

$$E\,\frac{1}{T} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{t^{n-1} e^{-t\theta}}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \Gamma(n)}\,dt =$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{(n-1)-1} e^{-t\theta}}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{n-1} \Gamma(n-1)}\,dt$$

Άρα $E\,\dfrac{\cancel{\Gamma(n)}^{\,n-1}}{T\,\Gamma(n-1)} = \theta \Rightarrow \boxed{E\left(\dfrac{n-1}{T}\right) = \theta}$

$\dfrac{n-1}{T}$: ΑΟΕΔ του θ

Άσκηση 1.16.

$X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. $U(0,\theta)$. ΑΟΕΔ του θ;

$f(x,\theta) = \dfrac{1}{\theta}$, $\underbrace{0 < x < \theta}$

Δεν πληρεί συνθήκες ομαλότητας, εξαρτάται από το $\theta \to$ όχι C-R

$$\prod f(x_i,\theta) = \frac{1}{\theta^n} \qquad \left.\begin{matrix} 0 < x_1 < \theta \\ 0 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \end{matrix}\right\} \; 0 < X_{(1)} < X_{(n)} < \theta$$

$$\Downarrow$$

$$\prod f(x_i,\theta) = \underbrace{\frac{1}{\theta^n}\, I_{(X_{(n)},+\infty)}(\theta)}\; I_{(0,X_{(n)})}(X_{(1)})$$

NO.

Date

$$F_{X_{(n)}}(y) = P(X_{(n)} \leq y) = P(X_1 \leq y \ldots X_n \leq y) \overset{\text{ανεξ.}}{=}$$

$$= P(X_1 \leq y) \ldots P(X_n \leq y) \overset{\text{ισον.}}{=} P^n(X \leq y) = F_X^n(y)$$

$$f_{X_{(n)}}(y) = n \left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = \frac{n y^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 \leq y \leq \theta$$

$$F_X(y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} dx = \frac{y}{\theta}$$

$$\int_0^\theta h(y) \frac{n y^{n-1}}{\theta^n} dy = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$$

$$\int_0^\theta h(y) y^{n-1} dy = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(\theta) \cdot \theta^{n-1} = 0 \ \forall \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = 0 \ \forall t$$

$$E X_{(n)} = \int_0^\theta y \, n \frac{y^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{\theta^n} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta =$$

$$= \frac{n \theta^{n+1}}{(n+1)\theta^n} = \frac{n}{n+1} \theta$$

Άρα: $E\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \theta.$

Άσκηση

$$E\left(\sum a_i X_i\right) = \mu \Rightarrow \mu \sum a_i = \mu \Rightarrow \sum a_i = 1$$ Συνθήκη

$$Var\left(\sum a_i X_i\right) = \sigma^2 \sum a_i^2$$

Έχω να ελαχιστοποιήσω το $\sum a_i^2$
υπό τη συνθήκη $\sum a_i = 1$.

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda) = \sum a_i^2 - \lambda\left(\sum a_i - 1\right)$$

πολλαπλασιαστής
Lagrange.

(παίρνω έναν γιατί έχω μία συνθήκη)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} &= 2a_1 - \lambda \Rightarrow \lambda_1 = \frac{a_1}{2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} &= 2a_2 - \lambda \Rightarrow \lambda_2 = \frac{a_2}{2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi}{a_n} &- 2a_n - \lambda \Rightarrow \lambda_n = \frac{a_n}{2} \\ &\sum a_i = 1. \end{aligned}\right\}$$ ίσα μεταξύ τους.

$$a_1 = a_2 = \dots a_n$$

$$\sum a_i = 1 \Rightarrow a_i = \frac{1}{n}.$$